ЭКЗАМЕНАЦИОННОЕ ЗАДАНИЕ

по математическому анализу за первый семестр
для студентов первого курса второго потока
Лектор профессор В.А.Зорич, 2011/12 уч.год

1. Вычислите пределы:
a) $\lim_{x\to\infty} x(\frac{1}{e}-(\frac{x}{x+1})^x)$;
b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\arcsin x}$;
c) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$, где $z=x+iy$ — комплексное число.

2. a) Известно, что $f\in C^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и f' — функция, ограниченная на $\mathbb{R}$. Покажите, что при этих условиях функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

b) Пусть $f\in C([a,b],\mathbb{R})$. Покажите, что тогда и функции $m(x) := \min_{a\le t\le x} f(t)$ и $M(x) := \max_{a\le t\le x} f(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$.

c) Постройте график функции $f(x)=\sqrt[3]{x(x+3)^2}$, указав (если есть) характерные детали (участки монотонности, локальные экстремумы, выпуклость, перегибы, асимптоты...)

3. a) Сформулируйте и докажите утверждение о дифференциале композиции функций.

b) Известно, что функция $f\in C^{(n)}([a,b],\mathbb{R})$ в $n+1$ точке отрезка $[a,b]$ обращается в нуль. Покажите, что тогда на этом отрезке есть по крайней мере одна точка, где $f^{(n)}$ обращается в нуль.

c) Пусть $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ — вектор-функция, гладкая на отрезке $\alpha\le t\le\beta$. Верно ли, что всегда найдется точка $\tau\in[\alpha,\beta]$, такая что $\mathbf{r}(\beta)-\mathbf{r}(\alpha)=\mathbf{r}'(\tau)\cdot(\beta-\alpha)$? Обоснуйте ваш ответ.

4. a) Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

b) Найдите полином (возможно меньшей степени), позволяющий вычислять значения $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2,\pi/2]$ с точностью до 10^{-2}.

5. a) Напишите неравенства Гёльдера и Минковского.

b) Напишите общее неравенство Иенсена для выпуклой функции и получите неравенство Коши — соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим n неотрицательных чисел.

c) Покажите, что $\cos x<\frac{\sin x}{x}$ при $0<|x|<\pi/2$.